Wiskunde 4 14-11-'01

Tentamenopgave[1]

I

1. Formuleer de stelling van Fubini.

Zij $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en

(1) $$F(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(t-x)^2} f(x)dx$$

2. Toon aan dat de functie F integreerbaar is en dat

(2) $$\int_{\mathbf{R}} F(t)dt = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx$$

3. Toon aan dat F een continue functie van $t \in \mathbb{R}$ is.

4. Formuleer de stelling over 'differentiatie onder het integraalteken'.

5. Is F differentieerbaar ?

II

1. Toon aan, m.b.v. de theorie an Fouriereeksen, dat voor $|x| \leq \pi$

(3) $$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

2. Is de convergentie van deze reeks uniform ?

3. Bereken m.b.v. (3) de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. (Pas op: er staat $x^2/4$ en niet x^2 !)

4. Geef de formule van Parseval, liefst in termen van de reële Fouriercoëfficienten. Bereken met behulp hiervan de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

III

Notaties: $Y(x) = 1, x \geq 0$, $Y(x) = 0$, $x < 0$, $\check{f}(x) = f(-x)$.

We definiëren de Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ van $f \in L^1(\mathbf{R})$ door

(4) $$\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi ixy} f(x)dx$$

1. Zij voor $a > 0$, $K_a(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$. Bewijs de formule

(5) $$\int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi ixy} K_a(x)dx = \frac{a^2}{a^2 + 4\pi^2 y^2}$$

2. Geef de formules van Plancherel voor de Fouriertransformatie.

3. Bereken de integraal, met $a > 0$, $b > 0$:

(6) $$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

Aanwijzing: maak gebruik van (5) en doe een transformatie van de variabele.

4. Zij voor $a > 0$, $f_a(x) = aY(x)e^{-ax}$. Bereken de Fouriergetransformeerden van f_a en van $\check{f}_a$.

5. Druk, m.b.v. Fouriertransformatie, het convolutieproduct $f_a * \check{f}_a$ uit in termen van K_a.

---

[1] De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk